

**Региональный этап всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

Мурманская область

Шифр участника: M0911

Класс: 09

Количество баллов: 30

Результат участия: победитель

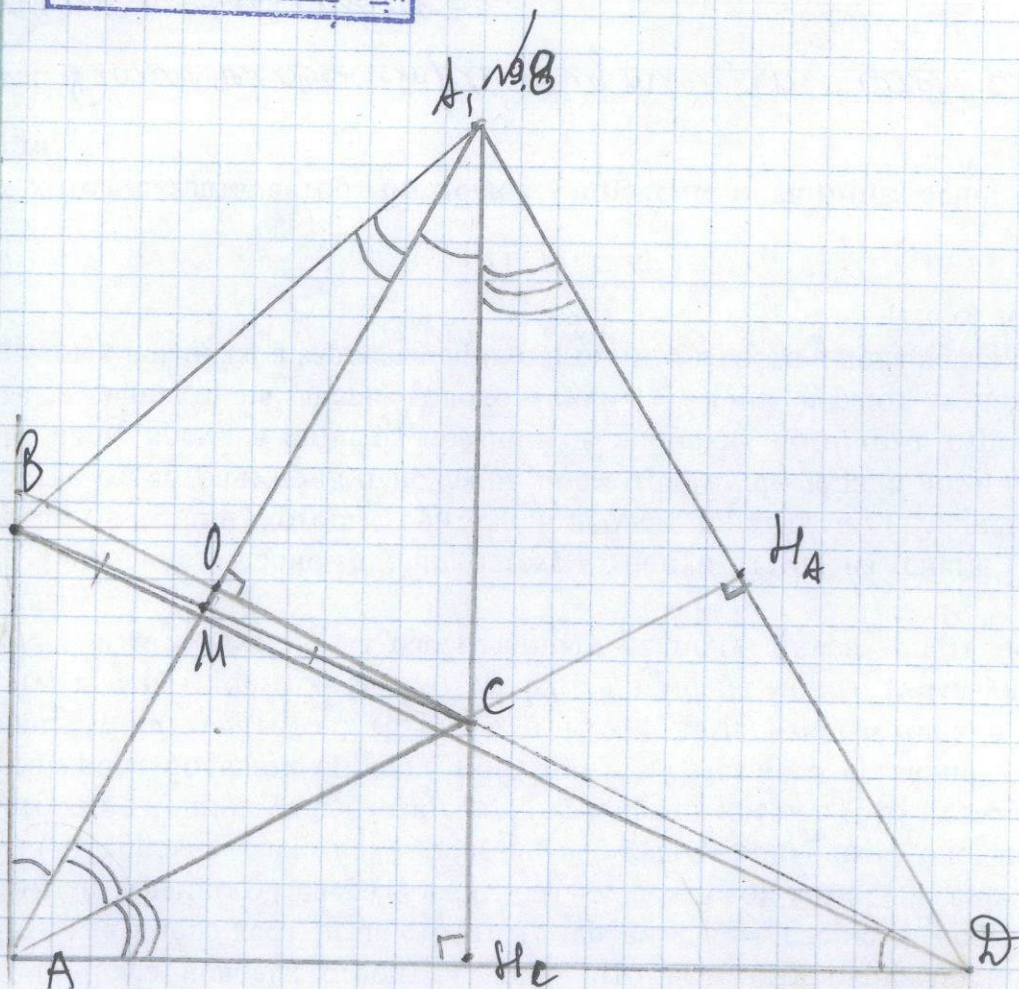
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
 ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
 МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
 ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
 ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
 "Мурманский областной
 центр дополнительного
 образования детей
 "ЛАПЛАНДИЯ"
 160011, г. Мурманск,
 пр. Героев-Освободителей, 2
 тел. 31-50-51, 31-54-82

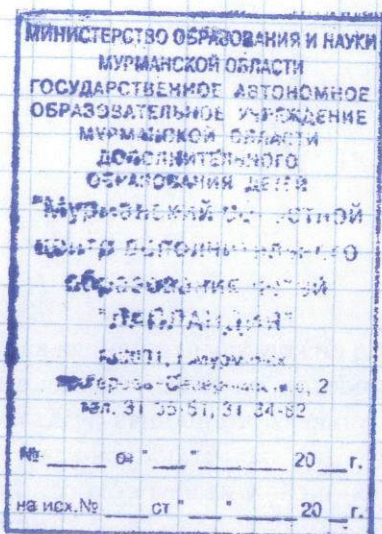
№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.
 на иск. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

МО911

5	6	7	8
7	0	0	7

Сделано
Сделано
Сделано





$\Rightarrow \angle BDA = \angle BA, A$ (опир. на дугу) M0911

$\Rightarrow \angle BDA = \angle BA, A = \angle CAM$

чтг.

№9.4.

Каждое k может быть

удач

Для каждого k работает правило:

при площади кусочка k^2 будет k закрашенных клеток $\Rightarrow$ соотношение площади к кол-во закрашенных клеток будет $k^2 : k = \frac{k}{1}$.

Для того, чтобы было более 2 удачных ишек, нужно, чтобы соотношение увеличилось, в то время как для каждого k оно разное $\Rightarrow$ макс. кол-во удачных ишек - 1.

Ответ: 1.

№ 9.6.

1) Для начала возьмем мин. a и b :

$$a=1, b=1; a+b=2, a \cdot b=1. \Rightarrow A_1 \{1; 2\}.$$

$$2) 2=1+1; 3=2+1. 2 \cdot 1=2; 2=1+1. 1+1=1 \cdot 1. \Rightarrow A_2 \{1; 2; 3\}$$

$$3) 4=3+1; 2+2. 3 \cdot 1=3 \dots \Rightarrow A_3 \{1; 2; 3; 4\}$$

$$2 \cdot 2=4$$

$$4) 5=2+3. 2 \cdot 3=6. 6=3+3. 3 \cdot 3=9. \dots \Rightarrow A_4 = N.$$

Ответ: $A_1 \{1; 2\}; A_2 \{1; 2; 3\}; A_3 \{1; 2; 3; 4\}; A_4 = N.$

№ 9.6.

А РАЗВЕ $S \in A$?
ГДЕ ЭТО ДОКАЗАНО?

Такое возможно:

Рассмотрим случай, когда на день рождения

I_{2020} не пришел только II , II -ого - III , ..., $XVII$ -ого - I .

Тогда каждый побывал на днях рожд. по 22 раза, при этом каждый раз он видел всех кроли $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждый встретился с каждым по 22 раза

$\Rightarrow$ такое могло быть.

Ответ: да, можно.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

1	2	3	4
7	7	0	2
<i>(signature)</i>	<i>(signature)</i>	<i>(signature)</i>	<i>(signature)</i>

✓4.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1$;

$f_2(x) = ax^2 + bx + c_2$.

$f_1(x_{100}) + f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) =$

$= ax_{100}^2 + bx_{100} + c_1 + ax_1^2 + bx_1 + c_2 + \dots + ax_{99}^2 + bx_{99} + c_{100} \Rightarrow$

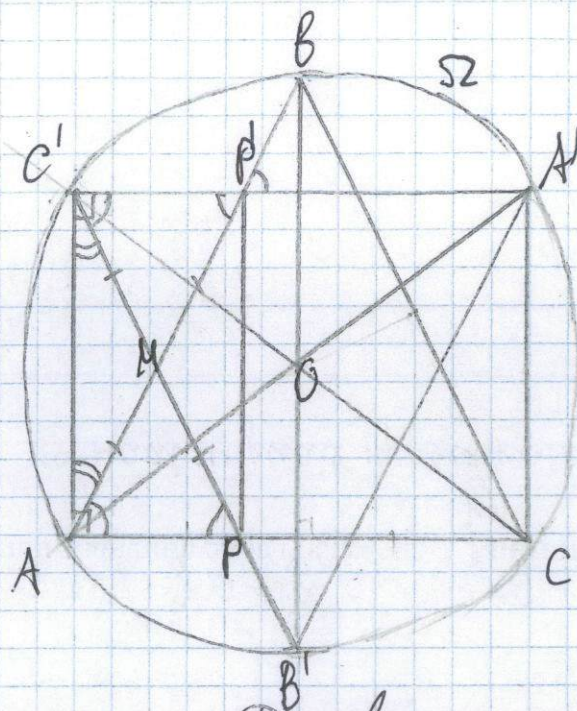
$\Rightarrow ax_1^2 + bx_1 + c_1 + ax_2^2 + bx_2 + c_2 + \dots + ax_{100}^2 + bx_{100} + c_{100} = 0,$

т.к. x_1 - корень, $= 0$; x_2 - корень, $= 0$... x_{100} - корень, $= 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$

Ответ: 0.

✓e.



Дано:

$\triangle ABC$ - н/д ($AB=BC$)

окр. Ω - опис. около $\triangle ABC$.

CC' - диаметр Ω

$C'P \perp BC$

$[C'P] \cap [AB] = M$

$[C'P] \cap [AC] = P$

Д-ть:

$C'M = MP$

Док-во:

1) Док. постро.: аналогично CC' проведем AA'

2) $A' \in \Omega, C' \in \Omega \Rightarrow B' \in \Omega$ ($\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$).

3) $\triangle ACC'$: CC' - диаметр; Δ впис. $\Rightarrow \angle CAC' = 90^\circ$

4) анал. $\angle A'CA = 90^\circ$

5) $AC' \parallel A'C$ ($\angle C'AC + \angle ACA = 180^\circ$) $\Rightarrow \angle AAC' = \angle A'AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C'A'A = 90^\circ - \angle CA'A = \angle A'AC = 90^\circ - \angle A'AC' \Rightarrow AC \parallel A'C'$
($\angle AAC' = \angle C'A'A$)
(некр. лем.)

6) из 5) $AC \parallel A'C' \Rightarrow \angle BAC = \angle BP'A'$ (соотв.), $\angle BP'A' =$
 $= \angle C'P'A' \Rightarrow \angle BAC = \angle C'P'A'$ (накр.)

4) $\angle C'PA = \angle C'P'A$ (отмечаются МО911
на дугу AC') $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MAP = \angle MPA \Rightarrow \triangle MAP - \text{р/д}$
($MA = PM$)

8) аналогично: $\triangle C'MP' - \text{р/д}$ ($MC' = MP'$)

9) $\angle MC'A = 90^\circ - \angle P'C'M =$
 $= 90^\circ - \angle MAP = \angle C'AM \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle C'MA - \text{р/д}$ ($C'M = MA$) $\Rightarrow C'M = MA = PM \Rightarrow$
 $\Rightarrow C'M = MP$

итог.
✓ з.ч.

Пусть камни 1, 2, 3, 4, 5 имеют массы

I; II; III; IV; V, соотв. и т.д.

1) возьмем I; II; III; IV. - сумма $10 \leq 11$ - норм.

2) заменим IV на V. $\Rightarrow$ I; II; III; V. (только 4 камня)
 $\Rightarrow$ IV и V - 4; 5, а I - 1/2/3. (сумма $11 \leq 11$ - норм.)

3) возьмем I, IV, VI.

I - 1/2/3. IV - 4/5. VI ≥ 6 - $1+4+6 \leq 11$ - норм. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждый камень имеет мин. массу, т.е. 1, 4, 6 $\Rightarrow$

$m(I) = 1$. итд. $\Rightarrow$ мин. кол-во действий - 3.

Ответ: 3.

$\sqrt{3}$.

$$2^n: \text{НОК}_1 + \text{НОК}_2 = 2^n.$$

$\text{НОК}_1 = \text{НОК}_2 = 2^k$.? Предположим, что можно:

$$\text{НОК}_1 = 2^n + k.$$

$$\text{НОК}_2 = 2^n - k.$$

Рассмотрим несколько подряд идущих чисел:

$m; m+1; m+2; m+3$. (либо $m \mid m+1: 2 \Rightarrow$

$$1) \text{НОК}_1 = (m+1)(m+2) \quad \text{НОК}_2 = m(m+3) \quad \Rightarrow \text{НОК} : 2$$

$$m^2 + 3m + 2.$$

$$m^2 + 3m.$$

$$\text{НОК}_1 - \text{НОК}_2 = 2k = 2. \quad k=1. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{НОК}_1 + \text{НОК}_2 = 2m^2 + 6m + 2 = 2^n \Rightarrow m^2 + 3m + 1 = 2^{n-1}.$$

всегда неч. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ противоречие.

$$2) \text{НОК}_1 = (m+2)(m+3) \quad \text{НОК}_2 = m(m+1) \quad (n \neq 1 \Rightarrow m \neq 0)$$

$$\text{НОК}_1 + \text{НОК}_2 = 2m^2 + 6m + 6 = 2^n.$$

$$m^2 + 3m + 3 = 2^{n-1}. \quad (m=1 \Rightarrow m \neq 1)$$

всегда неч. $\Rightarrow$ противор.

Ответ: нет, нельзя. не может.